



TITLE:

# Fourier Coefficients of Generalized Eisenstein Series of Degree Two (P-Adic L-Functions and Algebraic Number Theory)

AUTHOR(S):

水本, 信一郎

---

CITATION:

水本, 信一郎, Fourier Coefficients of Generalized Eisenstein Series of Degree Two (P-Adic L-Functions and Algebraic Number Theory). 数理解析研究所講究録 1981, 411: 176-183

ISSUE DATE:

1981-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102411>

RIGHT:

# Fourier Coefficients of Generalized Eisenstein Series of Degree Two.

東工大・理

水本信一郎

1°. Elliptic modular case の復習

$k \geq 4$  なる even integer に対し, weight  $k$  の Eisenstein series は次のように定義される:

$$E_k(z) = \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ c>0 \text{ or } \begin{cases} c=1 \\ d=0 \end{cases}}} \frac{1}{(cz+d)^k}, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0.$$

$E_k$  は次のように Fourier 展開をとつ:

$$E_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) e(nz) \quad (e(z) = \exp(2\pi i z));$$

$$a(0) = 1,$$

$$a(n) = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)! \zeta(k)} \sigma_{k-1}(n) \quad (n \geq 1).$$

$$\left( = - \frac{2k}{B_k} \sigma_{k-1}(n), \quad B_k : k\text{-th Bernoulli number.} \right)$$

但し,  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  は Riemann zeta function,

$$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{k-1}.$$

$E_k$  はすべての Hecke operators に対する common eigen

function  $\tau$ ,  $\sigma_{k-1}(n)$  の部分  $\tau$  の eigen value  $\tau \tau \tau$  である。

$$\tau : T(n) E_k = \sigma_{k-1}(n) E_k \quad (n \geq 1).$$

$\alpha(n)$  の分母に  $\zeta(s)$  の special value (あるいは Bernoulli number) があらわれ  $\tau$  であることに注意する。

2°. Degree  $n$  の Eisenstein series の定義 (Langlands 1964, Klingen 1967)

$n > 0$  : integer に対して

$$\Gamma_n \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ M \in M_{2n}(\mathbb{Z}) \mid {}^t M J M = J, J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

を  $n$  次 Siegel modular group といい (但し,  ${}^t M$  は  $M$  の転置行列,  $E$  は  $n$  次単位行列)。

$$\mathfrak{H}_n \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t Z = Z, \operatorname{Im}(Z) > 0 : \text{positive definite} \right\}$$

( $n$  次 Siegel 上半空間) に  $\Gamma_n$  が

$$M \langle Z \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

$$\left( M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n, Z \in \mathfrak{H}_n \right)$$

$\tau$  act する。

$k > 0$  : integer に対して

$$M_k(\Gamma_n) = \left\{ f: \mathfrak{H}_n \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{(i) holomorphic} \\ \text{(ii) } f(M \langle Z \rangle) = \det(CZ + D)^k f(Z) \\ \text{for } \forall M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \\ \text{(iii) bounded on } \{ \operatorname{Im}(Z) \geq c \cdot E \} \\ \text{for } \forall c > 0 \end{array} \right\}$$

の元は Siegel modular form of degree  $n$  and weight  $k$  といふ。  
 $M_k(\Gamma_n)$  は  $\mathbb{C}$ -vector space で有限次元である。

$f \in M_k(\Gamma_n)$  は次のように Fourier 展開をもつ:

$$f(Z) = \sum_{T \geq 0} a(T; f) e(\sigma(TZ))$$

( $\sigma$  は行列の trace). ここで  $T$  は  $n \times n$  の symmetric positive semidefinite semi-integral matrices をいふ。(  $T = (t_{ij})$  かつ semi-integral とは  $2t_{ij} \in \mathbb{Z}$  で, 対角成分  $t_{ii} \in \mathbb{Z}$  とする.)  $a(T; f)$  を Fourier coefficients of  $f$  at  $T$  とおき, かんたんに  $a(T)$  と書くことにする。

$\Phi: M_k(\Gamma_n) \rightarrow M_k(\Gamma_{n-1}): \mathbb{C}$ -linear map を

$$(\Phi f)(Z_1) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f\left(\begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}\right), \quad Z_1 \in \mathbb{H}_{n-1}$$

で定義する (Siegel operator).  $S_k(\Gamma_n) = \text{Ker}(\Phi)$  の元は cusp form といふ。  $S_k(\Gamma_0) = M_k(\Gamma_0) = \mathbb{C}$  である。

$f, g \in M_k(\Gamma_n)$  で  $f$  または  $g$  が cusp form のとき

$$\langle f, g \rangle = \text{vol}(\Gamma_n \backslash \mathbb{H}_n)^{-1} \int_{\Gamma_n \backslash \mathbb{H}_n} f(Z) \overline{g(Z)} |Y|^k \frac{dX dY}{|Y|^{n+1}} \quad (Z = X + iY)$$

により内積  $\langle, \rangle$  を考え, ことに限る  $S_k(\Gamma_n)$  の  $M_k(\Gamma_n)$  中の orthogonal complement は  $E_k(\Gamma_n)$  である。(the space of Eisenstein series.)  $E_k(\Gamma_n)$  は  $k > 2n$ ,  $k$ : even のとき, 次の Langlands-Klingen の Eisenstein series で張られる。

$r$  は  $0 \leq r \leq n$  なる integer とし,

$$\Delta_{n,r} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(n-r, n+r)} & * \end{pmatrix} \in \Gamma_n \right\}$$

There is a subgroup  $\Delta_{n,r}$  of  $\Gamma_n$ .  $\mathfrak{f}_{\Gamma_n}: Z \mapsto Z^* \in \mathfrak{f}_{\Gamma_n}$ , the map taking the  $(r, r)$ -entries to the  $(n-r, n+r)$ -entries:  $Z = \begin{pmatrix} Z^* \\ \vdots \end{pmatrix}$

$f \in S_k(\Gamma_r)$ ,  $k > n+r+1$ ,  $k$  even

$$E_{n,r}^k(Z, f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{M \in \Delta_{n,r} \backslash \Gamma_n} f(M \langle Z \rangle^*) |CZ + D|^{-k}, \quad Z \in \mathfrak{H}_n.$$

where  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  is a left coset modulo  $\Delta_{n,r}$  of a complete set of representatives.  $E_{n,r}^k(*, f) \in M_k(\Gamma_n)$  and we have:

$$E_k^r(\Gamma_n) = \{ E_{n,r}^k(*, f) \mid f \in S_k(\Gamma_r) \}$$

$$k > 2n \text{ then } E_k(\Gamma_n) = E_k^0(\Gamma_n) \oplus \cdots \oplus E_k^{n-1}(\Gamma_n)$$

(with the above notation cf. Klingen [1])

例  $E_k(\Gamma_1) = E_k^0(\Gamma_1) = \mathbb{C} \cdot E_k$ ,

$$E_k^0(\Gamma_n) = \mathbb{C} \cdot E_{n,0}^k(*, 1). \quad \blacksquare$$

$r = n$  and  $E_{n,n}^k(*, f) = f$  and  $r = 0$  and  $E_{n,0}^k(*, 1)$ ,

$$E_{n,0}^k(Z, 1) = \sum_{C,D \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|CZ + D|^k} \text{ is Siegel's Eisenstein series [4]}$$

and  $E_{n,0}^k(Z, 1) = \sum_{T \geq 0} a(T) e(\sigma(TZ))$  is the Fourier expansion,

$$a(T) \in \mathbb{Q} \text{ for all } T \geq 0 \quad (\text{Siegel [4]});$$

$$\exists b \in \mathbb{Z} \text{ such that } b \cdot a(T) \in \mathbb{Z} \text{ for all } T \geq 0.$$

(Siegel [5]) はよく知られている。

3°. Degree - two case.

$E_k$  の degree 2 の拡張として  $E_{2,0}$  と  $E_{2,1}$  がある。  $E_{2,0}$  の Fourier coefficients は Maass [2][3] により, explicit formula が与えられている。  $E_{2,1}$  の Fourier coefficients については 1° と 2° が目標である。  $2^\circ$  の問題を次のように formulate する:

(\*)  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) e(nz) \in M_k(\Gamma_1)$  を eigen form (= common eigen function for all Hecke operators) とし,  $[f] \in M_k(\Gamma_2)$  を  $\Phi([f]) = f$  となる eigen form (unique に決まる) とする。  
このとき次のことが成り立つ:

Proposition

$$[f] = \begin{cases} E_{2,0}(*, \Phi f) & \text{if } \Phi f \neq 0 \\ E_{2,1}(*, f) & \text{if } \Phi f = 0. \end{cases} \quad \square$$

いま

$$[f](Z) = \sum_{T \geq 0} a(T; [f]) e(\sigma(TZ))$$

を  $[f]$  の Fourier 展開とすると,  $a(T; [f])$  を調べることは問題になるわけである。以下, 一般性を失うことなく  $f$  を normalized (i.e. (\*) で  $a(1) = 1$ ) とする。主結果は次の定理である:

Theorem 1  $f \in M_k(\Gamma_1)$  is normalized eigen form,  $T > 0$ ,

$\Delta(T) \stackrel{\text{def}}{=} |2T|$  とある。  $-\Delta(T)$  は fundamental discriminant

(i.e.  $-\Delta(T) = \text{discriminant of } \mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta(T)})$ ) である。

$$a(T; [f]) = (-1)^{k/2} \frac{(k-1)!}{(2k-2)!} (2\pi)^{k-1} \Delta(T)^{k-\frac{3}{2}} \cdot \frac{L(k-1, \chi_{-\Delta(T)}) D(k-1, f, v_T)}{L_2(2k-2, f)}.$$

Theorem 2  $f \in M_k(\Gamma_1)$  is Theorem 1 と同じ とある。  $\gamma$  とする。

ある  $\gamma \in \mathbb{Z}(f)$ ,  $\gamma \neq 0$  がある。

$$\gamma \cdot a(T; [f]) \in \mathbb{Z}(f) \quad \text{for all } T \geq 0$$

( $\gamma$  は  $T$  によらずに定まる)。

### 記号の説明

①  $\chi_{-\Delta(T)}$  は  $\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta(T)})$  の character,  $L(s, \chi_{-\Delta(T)})$  は Dirichlet の L-function.

②  $T(m)f = \lambda(m)f$  ( $m \geq 1$ ) とある。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m) m^{-s} = \prod_p (1 - \alpha_p p^{-s})^{-1} (1 - \beta_p p^{-s})^{-1} (= L(s, f))$$

ある  $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{C}$  がある。

$$L_2(s, f) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_p (1 - \alpha_p^2 p^{-s})^{-1} (1 - \alpha_p \beta_p p^{-s})^{-1} (1 - \beta_p^2 p^{-s})^{-1},$$

$p$  は素数である。

$$v_T(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} e(z \cdot (t_1 m^2 + t_2 mn + t_3 n^2)) \quad \text{for } T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix}$$

$$v_T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e(nz) \quad \text{とある。}$$

$$D(s, f, v_T) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m) f(m) m^{-s}.$$

これは L-functions (Dirichlet series) は解析接続してある。

- ③  $Q(f) \stackrel{\text{def}}{=} Q(\lambda(m) \mid m \geq 1) \ni Q$  ± eigen values に  $\delta$  を generate する totally real number field とするとき,  $\mathbb{Z}(f)$  は  $Q(f)$  の integer ring とあらわす。

### Remarks

- (i) Th 1 から  $\delta$  と  $\alpha(T)$  がわかる。
- (ii)  $\text{rank } T < 2$  のとき  $a(T; [f])$  は  $f$  の Fourier coefficients に  $T\delta$ 。
- (iii)  $f = G_k = -\frac{B_k}{2k} E_k$  (normalized eigen modular form) のとき, Th 1 の公式は Maass の公式と一致する。
- (iv) Th 2 では  $[f]$  が eigen であることが重要。これは explicit に決まるはずである。
- (v) degree 1 のとき  $a(n) = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)! \zeta(k)} \sigma_{k-1}(n)$  と  $\sigma_{k-1}(n)$  との関連でいうと, Th 1 は  $\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)! \zeta(k)}$  の部分を決定し  $T = \pm 1$  に相当し, Th. 2 は  $B_k \in \mathbb{Q}$  ということに相当する。  
 $\zeta(s)$  のかわりに,  $f$  に attach  $L_T =$  "second"  $L$ -function  $L_2(s, f)$  があらわされる。

- (vi) Th 1 では  $Q(\sqrt{-4(T)})$  の class number が 1 のとき,

$$L(k-1, \chi_{-4(T)}) D(k-1, f, \vartheta_T) = w(T) \cdot L(k-1, f, \chi_{-4(T)}) L(k-1, f)$$

となる。但し, ②の記号で,

$$L(s, f, \chi_{-4(T)}) = \prod_p (1 - \chi_{-4(T)}(p) \alpha_p p^{-s})^{-1} (1 - \chi_{-4(T)}(p) \beta_p p^{-s})^{-1},$$

$w(T)$  は  $Q(\sqrt{-4(T)})$  に含まれる 1 のべき根の個数。



数値例 (Th 1 の応用)

$\Delta_{12} \in S_{12}(\Gamma_1)$  は weight 12 の unique normalized cusp form  
とあり、次のような special value を持つことが知られている:

$$L(11, \Delta_{12}, \left(\frac{-3}{\cdot}\right)) \cdot L(11, \Delta_{12}) = \frac{2^{25}}{3^{17} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 691} \sqrt{3} \pi^{23} \langle \Delta_{12}, \Delta_{12} \rangle,$$

etc. (cf. Remark (vi))

□

References

- [1] H. Klingen : Zum Darstellungssatz für Siegelsche Modulformen.  
Math. Z., 102, 30-43 (1967); Berichtung, 105, 399-400 (1968)
- [2] H. Maass : Die Fourierreihen der Eisensteinreihen zweiten Grades. Dan. Vid. Selsk., 34, nr. 7 (1964)
- [3] ——— : Über die Fourierreihen der Eisensteinreihen zweiten Grades. Dan. Vid. Selsk., 38, nr. 14 (1972).
- [4] C. L. Siegel : Einführung in die Theorie der Modulformen n-ten Grades. Math. Ann. 116, 617-657 (1939).
- [5] ——— : Über die Fourierschen Koeffizienten der Eisenstein Reihen. Dan. Vid. Selsk., 34, nr. 6 (1964).